Dr. Martin Friesen & Jonas Kremer SS 2018

Maß- und Integrationstheorie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Seien $\mathcal{A}_i$ beliebige σ-Algebren über Ω_i, $i = 1, 2$, und $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$\left\{T^{-1}(B)\,:\,B \in \mathcal{A}_2\right\} \quad \text{und} \quad \left\{B \subset \Omega_2\,:\,T^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\right\}$$

wieder σ-Algebren auf Ω_1 bzw. Ω_2 sind.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Wir definieren

$$\mathcal{F}^d = \left\{\cup_{j=1}^n [a_j, b_j)\,:\,n \in \mathbb{N},\, a_j, b_j \in \mathbb{R}^d\right\}.$$

Sei $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ die Menge aller offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{A}(\mathbb{R}^d)$ die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ und $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ die Menge aller kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma\left(\mathcal{F}^d\right) = \sigma\left(\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)\right) = \sigma\left(\mathcal{A}(\mathbb{R}^d)\right) = \sigma\left(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)\right),$$

wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}^d$ bezeichnet.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Sei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Für $c \in \mathbb{N}$ sei $T : \mathbb{R}^c \to \mathbb{R}^d$ stetig. Zeigen Sie, dass T eine $\mathcal{B}(\mathbb{R}^c)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-messbare Abbildung ist.

Aufgabe 4 *(5 Punkte)*
Sei $a \in \mathbb{R}^d$. Es seien $\mathcal{A}_{m^*}$ die σ-Algebra aller m^*-messbaren Mengen[1] und $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}^d$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$T_a(x) := x + a, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

sowohl $\mathcal{A}_{m^*}/\mathcal{A}_{m^*}$-messbar als auch $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-messbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass $m \circ T_a^{-1} = m$ sowohl auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ als auch auf $\mathcal{A}_{m^*}$ gilt.

Zusatz: Sei $r \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ und

$$H_r(x) := r \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Begründen Sie, warum $m \circ H_r^{-1} = m/|r|^d$ für Rechtecke der Form $[a, b)$ gilt.

[1] Siehe Theorem 3.2.